حل بجروت الميكانيكا 2023

حل السؤال الأوّل

أ. الرسم البياني "ب" يصف سرعة الجسم في التجربة 2. حسب الرسم البياني هذا سرعة الجسم سالبة. بما أنّ الجسم يتحرّك نحو منحدر السطح المائل، نستنتج أنّ هذا الاتّجاه هو الاتجاه السالب، والاتّجاه الموجب هو نحو مرتقى السطح.

ب. البُعد بين أعلى نقطة وبين النقطة K يساوي للقيمة المطلقة لإزاحة الجسم بين الزمنين $t=0.2\text{s}$ وَ $t=0.5\text{s}$. هذه الإزاحة مساوية للمساحة المحصورة بين الرسم البياني للسرعة وبين محور الزمن بين هذين الزمنين:

$$d=\left|\Delta x\left(0.2\to 0.5\text{s}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{0.3\times(-1.5)}{2}\right|=0.225\,\text{m}$$

ج. البُعد بين A وَ K يساوي القيمة المطلقة لإزاحة الجسم بين هاتين النقطتين:

$$d_{A\to K}=\left|\Delta x\left(0\to 0.2\text{s}\right)+\Delta x\left(0.2\to 0.5\text{s}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{1\times 0.2}{2}+\frac{(-1.5)\times 0.3}{2}\right|=0.125\,\text{m}$$

د. نجد أولا البعد بين النقطتين B وَ K. من أجل هذا نستعين بالعلاقة:

$$\Delta x_B=v_{0B}t+0.5a_Bt^2$$

بحسب الرسم البياني "ب" المعطى يتحقق أنّ $v_{0B}=-0.5\,\text{m/s}$. تسارع الجسم هو ميل الرسم البياني وهو $a=-5\,\text{m/s}^2$. لهذا نحصل على أنّ:

$$\Delta x\left(B\to K\right)=$$

$$=-0.5(0.62)+0.5(-5)(0.62)^2=$$

$$=-1.271\text{m}$$

البُعد بين B وَ A هو:

$$d=\left|\Delta x_B\left(0\to 0.62\right)\right|-\left|\Delta x_A\left(0\to 0.5\right)\right|=$$

$$=1.271-0.125=1.146\,\text{m}$$

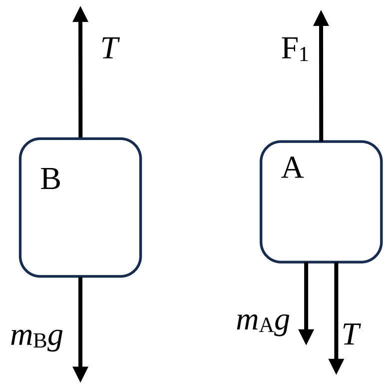
هـ. بسبب قوة الاحتكاك، يقل تسارع الجسم في التجربة الثانية (بقيمته المطلقة). لهذا الرسوم البيانيّة "ج" وَ "د" ليست ملائمة للحالة الموصوفة في هذا البند. إذا إنّ التسارع في هذه الرسوم ازداد بقيمته المطلقة.

بالنسبة للجسم في التجربة الأولى، يعمل عليه باتجاه موازٍ للسطح الاحتكاك الحركي f_K نحو الأسفل بالإضافة لمركب قوة الوزن $mg\sin\alpha$ والذي يتّجه نحو الأسفل أيضا. نتيجة هذا الأمر يزداد تباطؤ الجسم ويتوقّف بزمن أقل مما كان عندما كان السطح أملسا (أقل من 0.2s). لهذا نحصل على أنّ الرسم البياني المناسب هو "ب".

انتبه إلى أنّ تسارعي الجسم أثناء النزول متساويان في التجربتين وذلك لأنّه تعمل على الجسم أثناء النزول نفس القوى بالحالتين.

حل السؤال الثاني

أ.



الكرة الأرضيّة تُشغّل القوّتين m_Ag وَ m_Bg، بينما الحبل يُشغّل قوى الشدّ T.

ب. للجسم الأوّل يتحقق بحسب القانون الثاني لنيوتن:

$$F_1-T-m_Ag=m_Aa$$

وللجسم الثاني يتحقّق:

$$T-m_Mg=m_Ba$$

من أجل إيجاد التسارع، نجمع المعادلتين ونحصل على:

$$F_1-m_Ag-m_Bg=\left(m_A+m_B\right)a$$

$$\Rightarrow a=\frac{F_1-\left(m_Ag+m_B\right)g}{m_A+m_B}=$$

$$=\frac{F_1}{m_A+m_B}-g$$

ج. في الفترة الزمنيّة الأولى المجموعة موجودة بحالة اتّزان، لهذا يتحقّق للجسم B أنّ:

$$T=m_Bg$$

بالاعتماد على الرسم البياني نجد أنّه في الفترة الأولى $T=10\,\text{N}$. لهذا نحصل على أنّ:

$$m_Bg=10\ \Rightarrow m_B=1\text{kg}$$

في الفترة الزمنيّة $0<t<0.3\text{s}$ يتحقّق وضع اتّزان، لهذا نحصل على أنّ:

$$F_1=\left(m_A+m_B\right)g=40\,\text{N}$$

في الفترة الزمنيّة $0.3<t<0.8\text{s}$ يتحقّق أنّ $T=12\,\text{N}$ (أنظر إلى الرسم البياني). لحساب التسارع نستعين بالقانون الثاني لنيوتن للجسم B:

$$T-m_Bg=m_Ba$$

$$\Rightarrow a=\frac{T-m_Bg}{m_B}=\frac{12-10}{1}=2\,\text{m/s}^2$$

لحساب القوّة F_1 نستعين بالعلاقة التي وجدناها في البند "ب" حيث نحصل على أنّ:

$$F_1 = (m_A + m_B)(g + a) =$$
$$= 4(10 + 2) = 48\,\text{N}$$

في الفترة الزمنيّة $0.8 < t < 1.2\text{s}$ الهيئة متواجدة مرة أخرى بحالة اتّزان، لهذا نحصل على أنّ:

$$F_1 = (m_A + m_B)g = 40\,\text{N}$$

ه. في الفترة الزمنيّة $0.3 < t < 0.8\text{s}$ يتحقّق أنّ $F_1 > (m_A + m_B)g$، لهذا تتحرّك المجموعة بتسارع نحو الأعلى.

في الفترة الزمنيّة $0.8 < t < 1.2\text{s}$ الهيئة موجودة بوضع اتّزان، وبما أنّها كانت موجودة بحالة حركة في المرحلة السابقة، فإنّها سوف تستمر بالحركة نحو الأعلى بسرعة ثابتة.

و. بما أنّ التسارع نفسه في التجربتين، وبما أنّ كتلة المجموعة في التجربة الثانية أصغر، نحصل على أنّ ΣF في التجربة الثانية أصغر من ΣF في التجربة الأولى. لكي يتحقق أنّ ΣF في التجربة الثانية أصغر، يجب أن يتحقّق أنّ $F_2 > m_B g$. لهذا الادعاء الصحيح هو 3.

حل السؤال الثالث

أ. الحركة بالاتّجاه العمودي هي سقوط حرّ. نختار الاتّجاه الموجب نحو الأسفل ونقطة الأصل في نقطة بداية السقوط، ونحصل على أنّ $y = \frac{1}{2}gt^2$. نعوّض $y = 6\text{m}$ ونحصل على:

$$5t^2 = 6$$
$$\Rightarrow t = 1.1\text{s}$$

ب. حركة الكرة هي حركة رمي أفقيّ وذلك من اللحظة التي تحرّرت فيها. سرعة الكرة بالاتّجاه الأفقي مساوية لسرعة الطائرة وهي $v_x = 3\text{m/s}$. هذه السرعة ثابتة لا تتغيّر لأنّه لا تعمل على الكرة قوى بالاتّجاه الأفقي. من أجل حساب v_y في لحظة اصطدام الجسم بسطح الأرض، نعوّض $t = 1.1\text{s}$ في العلاقة $v = v_{0y} + gt$ ونحصل على:

$$v_y = 0 + 10(1.1) = 11\text{m/s}$$

مقدار سرعة الجسم لحظة الاصطدام بسطح الأرض هو:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 11^2} = 11.4\text{m/s}$$

اتّجاه هذه السرعة نحصل عليه من العلاقة:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = 74.74^{\circ}$$

تحت الخطّ الأفقيّ.

ج. يتحقّق أنّ $\Delta x = v_x \Delta t$, حيث أنّ $\Delta t = 0.5\text{s}$ وهو المدّة الزمنية بين لحظتي تحرير كرتين متعاقبتين. $v_x = 3\text{m/s}$. نعوّض ونحصل على أنّ:

$$\Delta x = 3(0.5) = 1.5\text{m}$$

د. بما أنّه توجد للكرات في الاتّجاه الأفقي نفس سرعة الطائرة، نحصل على أنّ الكرات سوف تتواجد مع الطائرة على خط مستقيم واحد معامد لسطح الأرض. لهذا فإنّ الإمكانيات 1 وَ 4 فقط من الممكن أن تكون صحيحة. بما أنّ البُعد العمودي بين الكرات يجب أن يزداد مع الزمن وذلك بسبب تسارع الجاذبيّة، نحصل على أنّ التخطيط الصحيح هو 4.

ه. بحسب قانون حفظ الطاقة نحصل على أنّ:

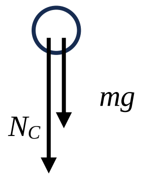
$$mg\Delta h = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g\Delta h}$$

بما انّه في الحالتين Δh وَ v_1 متساوين، نحصل على أنّ v_2 هو نفسه في الحالتين. لهذا فإنّ دانا هي على حق.

حل السؤال الرابع

أ.

(1) القوى التي تعمل على الكرة في النقطة C مبيّنة في الشكل التالي:



الكرة الأرضيّة تشغّل قوّة الجاذبيّة mg والمسار يُشغّل القوّة N_C.

ب. بحسب القانون الثاني لنيوتن يتحقق في النقطة C:

$$(1)\quad N_C + mg = m\frac{v_C^2}{R}$$

نستعين بقانون حفظ الطاقة من أجل حساب v_C. بين النقطتين P وَ C يتحقّق:

$$mgh_P + \tfrac{1}{2}mv_P^2 = mgh_C + \tfrac{1}{2}mv_C^2$$

يتحقّق أنّ $v_P = 0$ وَ $h_C = 2R$. نعوّض ونحصل على:

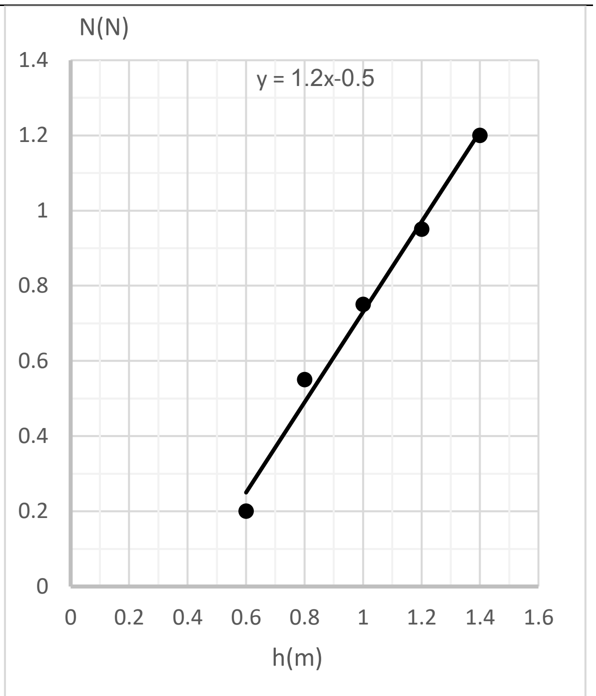
$$mgh + 0 = mg(2R) + \tfrac{1}{2}mv_C^2$$
$$\Rightarrow v_C^2 = 2g(h - 2R)$$

نعوّض v_C^2 في المعادلة (1) ونحصل على:

$$N_C + mg = m\frac{2g(h-2R)}{R}$$
$$\Rightarrow N_C = \left(\frac{2mg}{R}\right)h - 5mg$$

N_C هي القوّة التي يُشغّلها المجسّ على الكرة. بحسب القانون الثالث لنيوتن، تُشغّل الكرة على المجسّ قوّة مساوية بالمقدار ومعاكسة بالاتّجاه.

ب. (1) + (2)



ج. نقطة تقاطع الرسم البياني مع المحور العمودي يمثّل المقدار $-5mg$ (أنظر إل البند الفرعي أ2). لهذا يتحقّق أنّ:

$$-5mg=-0.5 \Rightarrow m=0.01\text{kg}$$

ميل الرسم البياني يمثّل المقدار $2mg/R$ (أنظر إلى البند الفرعي أ2). لهذا نحصل على أنّ:

$$\frac{2(0.01)g}{R}=1.2 \quad \Rightarrow R=\frac{1}{6}\text{m}$$

ب. يجب أن نجد بحسب الرسم البياني الارتفاع والذي يُعطينا أنّ $N_C=0.6\text{N}$. حسب الرسم نجد أنّ هذا الارتفاع هو 0.9m .

توجّه آخر:

نحسب أولا السرعة v_C وذلك بالاعتماد على $N_{C\min}$.

من القانون الثاني لنيوتن نحصل في النقطة C على أنّ:

$$N_{C\min}+mg=m\frac{v_C^2}{R}$$

$$\Rightarrow 0.6+0.1=0.01\frac{v_C^2}{1/6} \quad \Rightarrow v_C^2=11\tfrac{2}{3}$$

من حفظ الطاقة نحصل على أنّ:

$$mgh_{\min}+0=mg(2R)+\tfrac{1}{2}mv_C^2$$

$$\Rightarrow gh_{\min}=10\left(2\times\tfrac{1}{6}\right)+\tfrac{1}{2}\left(11\tfrac{2}{3}\right)=9.166$$

$$\Rightarrow h_{\min}=0.9166$$

هـ. عندما نحرّر الكرة من ارتفاع h_1 والذي يُعطينا أنّ $N_C=0$ ، يكون الجسم على وشك الانفصال في النقطة C ، وسرعته في هذه النقطة تكون عبارة عن السرعة الحرجة:

$$v_{C\min}=\sqrt{Rg}=\sqrt{\tfrac{1}{6}\times10}=1.3\text{m/s}$$

حل السؤال الخامس

أ.

(1) الطاقة الميكانيكيّة تُحفظ على السطح المائل الأملس وذلك لأنّ القوّة الوحيدة التي تنفّذ شغلا على الجسم أثناء حركته على هذا السطح هي قوّة الجاذبيّة mg ، وهذه القوّة هي قوّة حافظة.

على السطح الأفقي لا تُحفظ طاقة الجسم الميكانيكيّة، وذلك لأنّه تعمل على الجسم في هذا الجزء من المسار قوّة الاحتكاك الحركي، وهذه القوّة ليست حافظة.

(2) بما أنّه تعمل على الجسم قوى خارجيّة في جزئي المسار، نحصل على أنّه تعمل على الجسم في جزئي المسار كميّة دفع، ولهذا لا تحفظ كميّة حركة الجسم.

ب. بين أعلى نقطة وبين نقطة بداية السطح الأفقي يتحقّق:

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2+0=0+mgh$$

بين نقطة بداية السطح الأفقي وبين النقطة التي يتوقّف بها الجسم، يتحقّق بحسب قانون الشغل والطاقة:

$$W_{f_k}=\cancel{\tfrac{1}{2}mv_3^2}-\tfrac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg\Delta x=-\tfrac{1}{2}mv_2^2$$

من المعادلتين الأخيرتين نحصل على أنّ:

$$\mu_k mg\Delta x=mgh \quad \Rightarrow \mu_k=\frac{h}{\Delta x}=\frac{0.6}{1.5}=0.4$$

ج. في البند السابق حصلنا على أنّ: $\Delta x=h/\mu_k$. بما أنّ Δx لا يتعلّق بالكتلة نحصل على أنّ Δx هو نفسه في الحالتين.

ب. نحسب سرعة الجسم B مباشرة بعد الاصطدام. من حفظ كميّة الحركة نحصل على أنّ:

$$m_Av_A+\cancel{m_Bv_B}=m_Au_A+m_Bu_B$$

بما أنّ الاصطدام مرن للغاية، يتحقق أنّ:

$$v_A+u_A=\cancel{v_B}+u_B$$

من هذه المعادلة نحصل على أنّ:

$$u_A=u_B-v_A$$

نعوّض في قانون حفظ كميّة الحركة ونحصل على:

$$m_Av_A+\cancel{m_Bv_B}=m_A(u_B-v_A)+m_Bu_B$$

$$\Rightarrow \quad m_Av_A=m_Au_B-m_Av_A+m_Bu_B$$

$$\Rightarrow \quad 2m_Av_A=(m_A+m_B)u_B$$

$$\Rightarrow u_B=\frac{2m_Av_A}{m_A+m_B}=\frac{2(0.4)(4)}{0.4+1.2}\times4=2\text{m/s}$$

كميّة الدفع التي عملت على الجسم B هي:

$$J_{AB}=m_Bu_B-m_Bv_B=1.2(2)-1.2(4)=-2.4\text{Ns}$$

اتجاه كمية الدفع هو باتّجاه التغيّر بكمية حركة الجسم، أي نحو اليسار.

هـ. يتحقّق:

$$J_A=m_Au_A-\cancel{m_Av_A}=m_Au_A$$

حيث أنّ u_A هي السرعة التي يصل فيها الجسم إلى أسفل السطح المائل. بما أنّه في الحالتين u_A هو نفسه (لأنّ H متساوٍ)، نحصل على أنّ كمية الدفع التي عملت على الجسم في الحالتين هي نفسها $\left(J_1 = J_2\right)$. لهذا الإجابة الصحيحة هي 2.

حل السؤال السادس

أ. نستعين بالقانون الثالث لكبلر حيث يتحقّق للكوكبين b وَ c أنّ:

$$\frac{T_c^2}{R_c^3} = \frac{T_b^2}{R_b^3}$$

$$\Rightarrow T_c = T_b\sqrt{\left(\frac{R_c}{R_b}\right)^3} = 1.51\sqrt{\left(\frac{2.36}{1.73}\right)^3} =$$

$$= 2.4 days$$

للكوكب d يتحقّق:

$$\frac{T_b^2}{R_b^3} = \frac{T_d^2}{R_d^3}$$

$$\Rightarrow R_d = R_b\left(\frac{T_d}{T_b}\right)^{2/3} = 1.73\times10^9\left(\frac{4.05}{1.51}\right)^{2/3} =$$

$$= 3.34\times10^9 \text{ m}$$

ب. ادعاء أيمن ليس صحيحا، وذلك لأنّه يتحقق للكوكب في حركته الدائريّة حول النجم:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

بحسب العلاقة الأخيرة نجد أنّه كلّما ازداد r تقل سرعة الكوكب.

ج. تسارع الجاذبيّة للكوكب بتأثير النجم معطى بالعلاقة التالية (القانون الثاني لنيوتن):

$$g_b = \frac{GMm_b / r^2}{m_b} = \frac{GM}{r^2}$$

لكي نعبّر عن g_b بدلالة زمن الدورة T، نستعين بالقانون الثاني لنيوتن للكوكب في حركته الدائريّة حول النجم حيث يتحقق أنّ:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\Rightarrow g_b = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

(2) وزن جسم كتلته m والمتواجد على سطح الكوكب b معطى بالعلاقة mg حيث أنّ g هو تسارع الجاذبيّة على سطح الكوكب b وليس تسارع الكوكب b في حركته الدائريّة حول النجم.

د. بالاعتماد على العلاقة التي حصلنا عليها في البند الفرعي ج1 يتحقّق أنّ:

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

نعوّض المعطيات لأحد الكواكب (b مثلا) ونحصل على:

$$M = \frac{4\pi^2\left(1.73\times10^9\right)^3}{\left(6.673\times10^{-11}\right)\left(1.51\times24\times60\times60\right)^2} =$$

$$= 1.8\times10^{29} \text{ kg}$$

هـ. الزيادة بالطاقة ΔE والتي يجب إكسابها لكل واحدة من المركبتين تساوي القيمة المطلقة للطاقة الكليّة لكل واحدة من المركبتين في مسارها. الطاقة الميكانيكيّة الكلية للمركبة التي تدور حول الشمس معطاة بالعلاقة:

$$E_1 = -\frac{GmM_S}{2r_1}$$

والطاقة الميكانيكيّة الكليّة للمركبة التي تدور حول Trappist معطاة بالعلاقة:

$$E_2 = -\frac{GmM_T}{2r}$$

لهذا نحصل على أنّ:

$$\Delta E_1 = \frac{GmM_S}{2r}$$

$$\Delta E_2 = \frac{GmM_T}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{M_S}{M_T} = \frac{1.99\times10^{30}}{1.8\times10^{29}} = 11.05$$